



Anita Dąbrowicz-Tlalka

**Czy studenci i nauczyciele są gotowi na wykorzystanie platform edukacyjnych w uczeniu się i nauczaniu matematyki?**

MoodleMoot PL 2018



**MATEMATYKA JEST JAK  
DOBRA IMPREZA**

**NIKT NIE OGARNIA**

kwejk.pl

MINISTER ZDROWIA OSTRZEGA PRZED **kwejk.pl**

TOTAL  
FREE / ONE SIZE



100% COTTON

100% ACRYLIC

100% POLYESTER

100% NYLON

100% WOOL

100% LEATHER

100% SYNTHETIC LEATHER

패브릭, 가죽, 펠트 소재의  
제품을 임의대로 세탁하지  
마십시오.

## Podziel się swoją opinią i pomóż nam tworzyć największy na świecie serwis muzyczny!

1/3: Jakie jest prawdopodobieństwo, że polecisz Spotify znajomym?



Nie polecę

Oczywiście, że poleci!

2/3: Jak uzasadnisz swoją decyzję?

Prawdopodobieństwo nie może być większe niż 1




6 ÷ 2(2 + 1)  
= 9

CASIO  
S-V.P.A.M.  
6 ÷ 2(2 + 1)

**31** is prime

**331** is prime

**3331** is prime 

**33331** is prime

**333331** is prime

**3333331** is prime

**33333331** is prime

*But what about* **333333331**

It turns out not to be, because:

$$17 \times 19607843 = 333333331$$

Which just goes to show that you can never trust a pattern just because it *looks like* it might continue. Mathematicians always need **proof**.



Teoria w pigułce

Przykłady



Niech  $X$  i  $Y$  będą zbiorami. Odwzorowanie  $f$ , które każdemu elementowi zbioru  $X$  przyporządkowuje dokładnie jeden element zbioru  $Y$ , nazywamy **funkcją**. Piszemy wtedy  $f : X \rightarrow Y$ .

Zbiór  $X$  nazywamy **dziedziną** funkcji, a jego elementy **argumentami** funkcji. Dla dowolnego  $x \in X$ , element  $y = f(x)$  nazywamy **wartością** funkcji  $f$  w **punkcie**  $x$ . Definicję funkcji  $f$  możemy teraz zapisać w innej postaci:  $f : x \mapsto f(x)$ , gdzie  $x \in X$ .

Mówimy, że funkcje  $f$  i  $g$  są **równe**, jeżeli mają tę samą dziedzinę  $X$  oraz

$$\bigwedge_{x \in X} f(x) = g(x).$$

Strona Główna

Wykład 1

Wykład 2

Wykład 3

Wykład 4

Wykład 5

Wykład 6

Wykład 7

Wykład 8

Wykład 9

Wykład 10

Wykład 11

Linki

Wykłady do ściągnięcia

Zadania



Wykład 3

W tym wykładzie omówione zostaną granice funkcji. Po podstawowe własności granicy funkcji oraz twierdzenie o trzech ciągach. Rozpocznemy również analizę rachunku różniczkowego funkcji 1-jej zmiennej, której dokończenie znajduje się w kolejnym wykładzie.

Wykład III  
Granice funkcji

$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A = \text{punkt}$   
 $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f = \text{funkcja}$ ,  $S_{x_0} = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$

Definicja 3.1 (definicja Cauchy'ego granicy funkcji)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in S_{x_0} \setminus \{x_0\} : |f(x) - g| < \epsilon$$

$$|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x \in S_{x_0}(\delta)$$

$$|f(x) - g| < \epsilon \Leftrightarrow f(x) \in S_g(\epsilon)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in S_{x_0} \setminus \{x_0\} : f(x) \in S_g(\epsilon)$$

Własności granic funkcji

Twierdzenie 0.3

Ciągłość w  $x_0$

Ciągłość na  $I$

Ograniczenia

Kresy funkcji

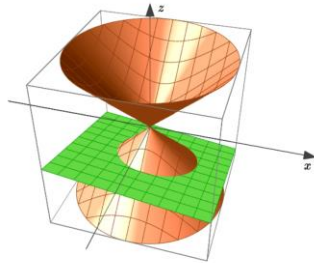
Rachunek różniczkowy

Pochodne

Interpretacja geometryczna

Różniczkowość

Działania arytmetyczne



Wirtualne Laboratorium Matematyczne

$Ax + By + Cz = d$

maszyna

A: 0.25 B: 0.5 C: 2.00

d: -10.00

stan gotowy

a: 0.00 b: 0.00 c: 0.00

A: 1.00 B: 1.00 C: 1.00



Matematyka

Zmień przedmiot

E-podręczniki

Moduły

Podręcznik ogólny

$A = \frac{dG}{dx}$

Algebra liniowa i geometria analityczna

$A = \frac{dG}{dx}$

Pochodna funkcji jednej zmiennej rzeczywistej

Politechnika Wrocławska

Przykład 2

Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji, uzasadnij równość

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0, f(x_n) \rightarrow g$$

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2}{2x^2 + 3} = \frac{1}{2}$

wtedy  $x_n \rightarrow 0$  wtedy  $f(x_n) = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n^2 + 3} \rightarrow \frac{0 + 2}{0 + 3} = \frac{2}{3}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = +\infty$

wtedy  $x_n \rightarrow 1$  wtedy  $f(x_n) = \frac{1}{x_n - 1} \rightarrow \infty$

Co wypada wiedzieć

1a.  $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1)^2$

1b.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

2a.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{2x^2 + 3}$

Korzystając z def. Heinego granicy funkcji, uzasadnij równość  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{2x^2 + 3} = \frac{1}{2}$

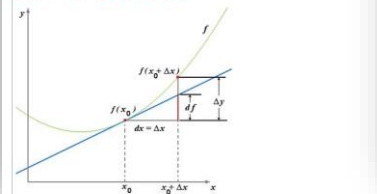
OGŁADAJ OD: [00:17:31]

Różniczką funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$  nazywamy funkcję  $df$  zmiennej  $\Delta x = x - x_0$  określoną

Zapamiętaj!- to jest ważne

Jeżeli funkcja  $f$  ma pochodną właściwą w punkcie  $x_0$ , to

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$



Rys. Witkopa

# Komunikacja...

ORTOGRAFIA MA ZNACZENIE



MACIEK MIAŁ NA SOBIE  
SWETER W RÓŻE

PACZAIZM.PL



MACIEK MIAŁ NA SOBIE  
SWETER W RURZE





# Komunikacja...

Wirtualne Laboratorium Matematyczne

Wprowadź wzór

| 123± = | ∩ ∪ sin | abc | αβγ∇ | [ · ] |   |   |
|--------|---------|-----|------|-------|---|---|
| ±      | ∓       | *   | 1    | 2     | 3 | ∅ |
| <      | >       | -   | 4    | 5     | 6 | ! |
| <      | >       | +   | 7    | 8     | 9 | / |
| ≠      | =       | ( ) | 0    | ,     | ° |   |
| □      | e       | x   | y    | n     | π | × |
| □      | □       | □   | √□   | ∇□    | ■ | ■ |

$\sqrt[n]{\pi} \rightarrow \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\psi}{\square}$

Wstaw wzór

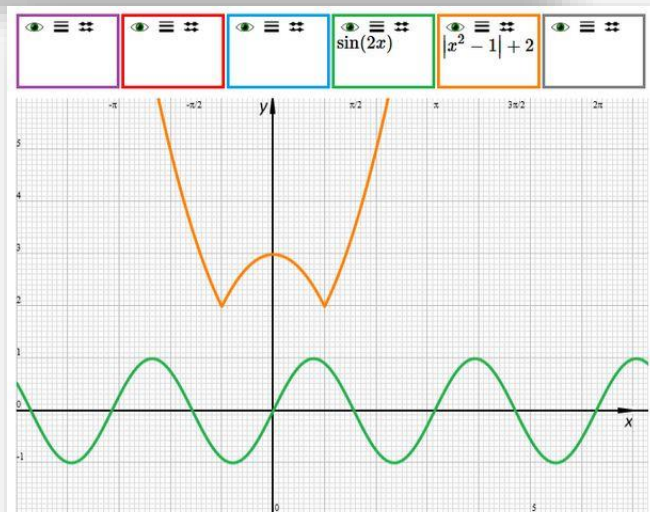
Dla  $0 < \theta < 1$  oraz  $\Delta x = x - x_c$  resztę można zapisać w postaci  $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta \Delta x)}{n!} (\Delta x)^n$ .

Poniżej można zobaczyć jak wyglądają wykresy wybranych funkcji oraz odpowiadających im wielomianów kolejnych stopni:

sinx  $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$$

(Przesuń czerwony suwak w prawo, aby zwiększyć stopień wielomianu. W górnym, lewym rogu aplikacji możesz wybrać inny wzór funkcji. Po wybraniu ikony kalkulatora w górnym prawym rogu można wyznaczyć przybliżoną wartość w danym punkcie oraz błąd względny i bezwzględny takiego przybliżenia dla określonego stopnia wielomianu.)



Widać, że funkcje nie przecinają się w żadnym punkcie, więc równanie nie jest spełnione.

$x \in \phi$

$$|v| = \pi \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2 dx$$

Możemy najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną  $\int \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2 dx$  korzystając z wzoru rekurencyjnego:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^n} dx = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n} dx$$

Liczymy drugą całkę występującą po prawej stronie równości. Mamy:

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^n} = \int x \frac{x dx}{(x^2+1)^n} = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad v = \frac{x}{(x^2+1)^n} \\ u \cdot = 1, \quad v = \frac{-1}{2(1-n)(x^2+1)^{n-1}} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{-x}{(2-2n)(x^2+1)^{n-1}} + \int \frac{dx}{(2-2n)(x^2+1)^{n-1}} = \frac{-x}{(2-2n)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2-2n} \cdot \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$$

[w podstawieniu zamiast 'użyłam \*]

$$\text{Podstawienie wzięto się z obliczenia całki pomocniczej } \int \frac{x dx}{(x^2+1)^n} = \left\{ \begin{array}{l} x^2+1 = t \\ 2x dx = dt \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^n} = \frac{-1}{(2-2n)(x^2+1)^{n-1}} + C_1$$

Liczymy zatem dalej:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \frac{dx}{(x^2+1)} + \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2} \int \frac{dx}{(x^2+1)} =$$

$$= \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \int \frac{dx}{(x^2+1)}$$

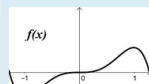
A więc, podstawiając nasze dane, liczymy:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctg(x) + C = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{x^2+1} + \arctg(x) \right) + C$$

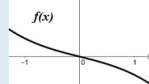


# Cel bez planu jest po prostu marzycielstwem

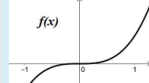
Dopasuj wykresy pochodnych do wykresów funkcji.



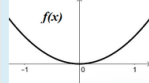
Przeciagnij tutaj odpowiedź



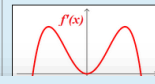
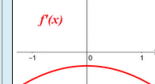
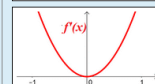
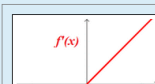
Przeciagnij tutaj odpowiedź



Przeciagnij tutaj odpowiedź



Przeciagnij tutaj odpowiedź

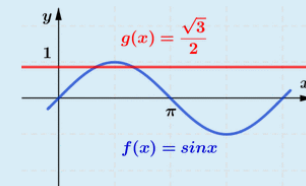


Dana jest funkcja  $f(x) = 3 - \frac{4|1-x|}{x-1}$

Wybierz jedną lub więcej:

- A. Funkcja  $f(x)$  nie ma miejsc zerowych
- B. Funkcja  $f(x)$  nie jest różnowartościowa
- C. Funkcja  $f(x)$  jest stała w przedziale  $(1, +\infty)$

Na rysunku przedstawiono funkcję  $f(x)$  oraz  $g(x)$ .



Przebiegiem równania  $f(x) = g(x)$  wtedy i tylko wtedy, gdy

jedną odpowiedź:

- a.  $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$
- b.  $x = \frac{7\pi}{3} \vee x = \frac{9\pi}{3}$
- c.  $x = \frac{7\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{9\pi}{3} + 2k\pi$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$
- d.  $x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3}$

Połącz wzory funkcji z ich wykresami

$y = \log_{0.5} |x|$

Przeciagnij tutaj odpowiedź

$y = -\log_{0.5} x$

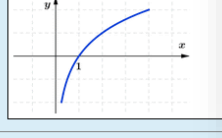
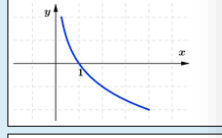
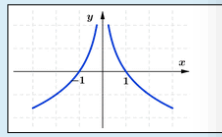
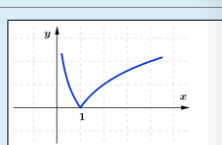
Przeciagnij tutaj odpowiedź

$y = \log_{0.5} x$

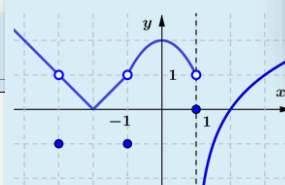
Przeciagnij tutaj odpowiedź

$y = |\log_{0.5} x|$

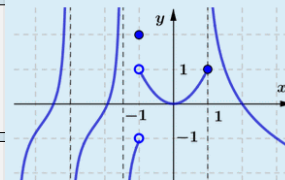
Przeciagnij tutaj odpowiedź



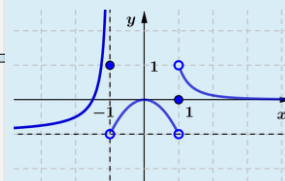
Połącz wykres funkcji  $f(x)$  z odpowiedzią



Przeciagnij tutaj odpowiedź



Przeciagnij tutaj odpowiedź



Przeciagnij tutaj odpowiedź

funkcja  $f(x)$  ma w punkcie  $x_0 = -1$  nieciągłość drugiego rodzaju oraz  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

funkcja  $f(x)$  ma w punkcie  $x_0 = 1$  nieciągłość drugiego rodzaju oraz  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -1$

funkcja  $f(x)$  ma w punkcie  $x_0 = -1$  nieciągłość pierwszego rodzaju typu "luka" oraz  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$


funkcja  $f(x)$  ma w punkcie  $x_0 = 1$  nieciągłość pierwszego rodzaju typu "skok" oraz  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$



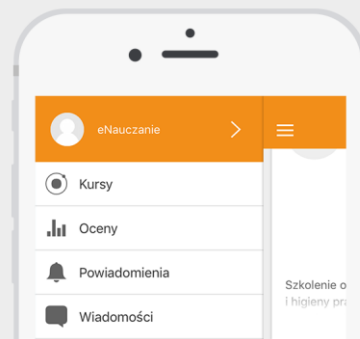
## Cel bez planu jest po prostu marzycielstwem

- efektywna komunikacja synchroniczna i asynchroniczna językiem wzorów i symboli
- metodyka
- interaktywne wizualizacje
- równoległe wykorzystanie oprogramowania do obliczeń inżynierskich
- aktywna weryfikacja wiedzy



 **Już dostępna!**

Aplikacja mobilna  
platformy eNauczenie  
Politechniki Gdańskiej



10:07 99%

← Wstecz SEMESTR II

Materiały pomocnicze do wykładów i ćwiczeń z matematyki  
przeznaczone dla studentów kierunków Chemia, Chemia Budowlana oraz Korozja Wydziału Chemicznego (II)  
E-mail: [anita.tlalka@pg.edu.pl](mailto:anita.tlalka@pg.edu.pl)  
Więcej informacji: <https://pg.edu.pl/anita>

- Dane kontaktowe oraz informacja o konsultacjach
- Treść programu w semestrze II
- Polecana literatura
- Wzory i wykresy
- Forum aktualności

Wiadomości i ogłoszenia prowadzącego zajęcia (brak możliwości zamieszczania informacji przez studentów).

10:07 99%

← Wstecz Szeregi liczbowe o wyrazac...

### Szereg harmoniczny

**Definicja**

Szeregiem harmonicznym rzędu  $r$  nazywamy szereg, którego wyrazy są odwrotnościami  $r$ -tych potęg liczb naturalnych

$$1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$$

**! Zapamiętaj - to jest ważne**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$$

Szereg harmoniczny  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$  jest

- zbieżny, gdy  $r > 1$ ;
- rozbieżny, gdy  $r \leq 1$ .

**Warunek konieczny zbieżności szeregu**

**Twierdzenie** (warunek konieczny zbieżności szeregu)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Jeżeli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny, to  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**Uwaga**

10:08 98%

← Wstecz 4.6 Quiz

Pytanie 1 Nie udzielono odpowiedzi  
Punkty: 2,00

Dany jest układ równań

$$\begin{cases} x + u - t = 1 \\ z + 2u - 2t = 1 \\ 2x + 4y - z + 21u + 3t = 1 \\ x + 2t = 0 \\ x + 12u - t = 0 \end{cases}$$

Oblicz wartość niewiadomej  $u$ .  
Odpowiedź podaj w postaci dziesiętnej, zaokrąglonej do trzech miejsc po przecinku (Uwaga! należy użyć przecinka, nie kropki, np. 0,123)

Odpowiedz

Dalej

Określ czy podany szereg jest zbieżny:

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{5^n}{2}$$

Wybierz ... ▾

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^n}$$

Wybierz ... ▾

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{5}{2^n}$$

Wybierz ... ▾

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{7^{n-1}}{5^n}$$

Wybierz ... ▾

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{2018!}{7^n}$$

Wybierz ... ▾

Dobierz odpowiednie nazwy do macierzy.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Wybierz ... ▾

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Wybierz ...  
macierz jednostkowa stopnia 3  
macierz trójkątna górna  
macierz wymiaru 2x3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

macierz wymiaru 3x2  
macierz trójkątna dolna

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wybierz ... ▾

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Wybierz ... ▾

Określ, czy podany szereg jest zbieżny:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Wybierz ... ▾

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Wybierz ... ▾

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^3}}$$

Wybierz ... ▾

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$$

Wybierz ...  
szereg zbieżny  
szereg rozbieżny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Wybierz ... ▾

Iloczyn macierzy  $A \cdot B$ , gdzie  $A$  jest macierzą 3x5, a  $B$  jest macierzą 5x4

Wybierz jedną odpowiedź:

- jest macierzą wymiaru 3x4.
- nie jest wykonalny.
- jest macierzą kwadratową.
- jest macierzą wymiaru 4x3.

Kryterium d'Alamberta

Niech  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, a_n \neq 0$ . Wtedy szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest

- ▾ dla  $q < 1$ ;
- ▾ dla  $1 < q \leq \infty$ .

Dla  $q = 1$  kryterium nie rozstrzyga, czy szereg jest zbieżny.